

UDC 517.51

# The best approximation of functions from anisotropic Nikol'skii–Besov classes defined in $\mathbb{R}^d$

## Найкраще наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бесова визначених на $\mathbb{R}^d$

S. Ya. Yanchenko

*Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv*

С. Я. Янченко

*Інститут математики НАН України, Київ*

### Анотація

We establish the exact-order estimates of the best approximations of the functions from anisotropic Nikol'skii–Besov classes of several variables by entire functions in the Lebesgue spaces.

Одержано точні за порядком оцінки найкращого наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бесова функцій багатьох змінних цілими функціями у просторах Лебега.

У роботі досліджується питання найкращого наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бесова  $B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)$  [1], [2], де параметр  $\mathbf{r}$  —  $d$ -вимірний вектор з додатними координатами ( $r_j > 0$ ,  $j = \overline{1, d}$ ). Похибка наближення при цьому вимірюється у метриці простору  $L_q(\mathbb{R}^d)$   $1 < p \leq q < \infty$ . В якості апарату наближення використовуються цілі функції експоненціального типу (див., наприклад, [3]) з носіями їх перетворення Фур'є в  $d$ -вимірних паралелепіпедах.

**1. Основні позначення та означення класів Нікольського–Бесова.** Нехай  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$  —  $d$ -вимірний евклідів простір з елементами  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ .  $L_p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , — простір вимірних на  $\mathbb{R}^d$  функцій  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$  зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p := \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|.$$

Для  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$  означимо модуль гладкості  $k$ -го порядку функції  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$  за змінною  $x_i$ , який будемо позначати  $\omega_k(f, te_i)_p$ , такою формулою:

$$\omega_k(f, te_i)_p = \sup_{|\mathbf{h}| \leq t} \|\Delta^k(f, \mathbf{h}e_i)\|_p = \sup_{|\mathbf{h}| \leq t} \left\| \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} C_k^l f(\mathbf{x} + l\mathbf{h}e_i) \right\|_p,$$

де  $|\mathbf{h}| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_d^2}$  — евклідова норма вектора  $\mathbf{h}$ , а  $e_i$  — одиничний вектор, який направлений вздовж осі  $x_i$ .

Нехай  $r_i > 0$ ,  $r_i = \bar{r}_i + \alpha_i$ , де  $\bar{r}_i$  — ціле,  $0 < \alpha_i \leq 1$ ,  $i = \overline{1, d}$ .

**Означення 1.** Будемо говорити, що функція  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$  належить простору  $B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p$ ,  $\theta \leq \infty$ ,  $\mathbf{r} > 0$ , якщо вона має інтегровані в степені  $p$  на  $\mathbb{R}^d$  часткові, узагальнені в сенсі Соболева, похідні вигляду

$$D_i^k f = \frac{\partial^k f}{\partial^k x_i}, \quad k = \overline{0, \bar{r}_i}, \quad i = \overline{1, d},$$

і при цьому

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}} = \|f\|_p + \sum_{i=1}^d \left( \int_0^\infty t^{-\theta\alpha_i-1} \omega_{1+[\alpha_i]}^\theta(D_i^{\bar{r}_i} f, te_i)_p dt \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty \quad \text{при } 1 \leq \theta < \infty$$

та

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^{\mathbf{r}}} = \|f\|_{H_p^{\mathbf{r}}} = \|f\|_\infty + \sum_{i=1}^d \sup t^{-\alpha_i-1} \omega_{1+[\alpha_i]}(D_i^{\bar{r}_i} f, te_i)_p < \infty \quad \text{при } \theta = \infty.$$

Відзначимо, що з так введеною нормою простори  $B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)$  будуть банаховими.

Простори  $B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)$  були введені О. В. Бесовим [2] і  $B_{p,\infty}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d) = H_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)$ , де  $H_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)$  — простори, які ввів С. М. Нікольський [1]. Далі, зберігаючи ті самі позначення, будемо розглядати класи  $B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)$ , тобто одиничні кулі у просторах  $B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)$ :

$$B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \right\}.$$

Крім цього, для спрощення записів, замість  $B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)$  та  $H_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)$  будемо використовувати позначення  $B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}$  та  $H_p^{\mathbf{r}}$ .

Зазначимо, що важливим для встановлення результатів є той факт, що простори  $B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}$  зі зростанням параметра  $\theta$  розширюються (див., наприклад, [3, с. 278]), тобто

$$B_{p,1}^{\mathbf{r}} \subset B_{p,\theta}^{\mathbf{r}} \subset B_{p,\theta'}^{\mathbf{r}} \subset B_{p,\infty}^{\mathbf{r}} = H_p^{\mathbf{r}}, \quad 1 \leq \theta < \theta' \leq \infty. \quad (1)$$

Наведемо один результат П. І. Лізоркіна (див. [4]), який дає можливість означити норму функцій з просторів  $B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)$  в іншій формі, яка в подальшому зумовлює використання перетворення Фур'є в теорії даних просторів.

Для цього попередньо наведемо необхідні означення.

Назвемо найкращим наближенням функції  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій степеня  $\nu_1, \dots, \nu_d$  величину

$$E_{\nu_1, \dots, \nu_d}(f)_p = \inf_{g_{\nu_1, \dots, \nu_d}} \|f - g_{\nu_1, \dots, \nu_d}\|_p \quad (2)$$

де  $\inf$  береться по всіх цілих функціях  $g_{\nu_1, \dots, \nu_d}(x_1, \dots, x_d)$  степеня  $\nu_1, \dots, \nu_d$  відповідно за змінними  $x_1, \dots, x_d$ .

**Теорема А [4].** *Функція  $f$  належить простору  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ ,  $r > 0$ ,  $1 \leq p, \theta \leq \infty$ , тоді і тільки тоді, коли вона зображується збіжним у метриці простору  $L_p(\mathbb{R}^d)$  рядом*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{s=0}^{\infty} P_{\mathbf{a}^s}(\mathbf{x}), \quad P_{\mathbf{a}^s}(\mathbf{x}) = P_{a_1^s, \dots, a_d^s}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

де  $P_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\mathbf{x})$  — цілі функції степеня не вищого за  $\nu_1, \dots, \nu_d$  по кожній змінній  $x_1, \dots, x_d$  відповідно, і виконується умова

$$\left( \sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|P_{\mathbf{a}^s}\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \quad \text{де } b = a_i^{r_i} > 1, \quad i = \overline{1, d}. \quad (4)$$

Окрім цього має місце оцінка

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r} \leq C_1 \left( \sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|P_{\mathbf{a}^s}\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}. \quad (5)$$

Якщо, крім того, частинні суми  $n$ -го порядку ряду (3) реалізують найкраще наближення або дають порядок найкращого наближення, то вираз у лівій частині (4) і  $\|f\|_{B_{p,\theta}^r}$  еквівалентні, тобто разом із (5) має місце оцінка

$$\left( \sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|P_{\mathbf{a}^s}\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq C_2 \|f\|_{B_{p,\theta}^r}.$$

На основі теореми А дамо еквівалентне означення анізотропних просторів  $B_{p,\theta}^r$ , яким будемо користуватися у подальших міркуваннях. Для цього нагадаємо означення перетворення Фур'є (див., наприклад, [5]) з використанням якого дається відповідне означення.

Нехай  $S = S(\mathbb{R}^d)$  — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційовних на  $\mathbb{R}^d$  комплексозначних функцій  $\varphi$ , що спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше за будь-який степінь функції  $|\mathbf{x}|^{-1}$  (див., наприклад, [5], [6]). Через  $S'$  позначимо простір лінійних неперервних функціоналів на  $S$ . Зазначимо, що елементами простору  $S'$  є узагальнені функції. Якщо  $f \in S'$  і  $\varphi \in S$ , то  $\langle f, \varphi \rangle$  позначає значення  $f$  на  $\varphi$ .

Перетворення Фур'є  $\mathfrak{F}\varphi : S \rightarrow S$  визначається згідно з формулою

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathbf{t}) e^{-i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{t})} d\mathbf{t} \equiv \tilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}).$$

Обернене перетворення Фур'є  $\mathfrak{F}^{-1}\varphi : S \rightarrow S$  задається таким чином:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{t})} d\boldsymbol{\lambda} \equiv \widehat{\varphi}(\mathbf{t}).$$

Перетворення Фур'є узагальнених функцій  $f \in S'$  (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається згідно з формулою

$$\langle \mathfrak{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi \rangle \quad (\langle \widetilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle),$$

де  $\varphi \in S$ .

Обернене перетворення Фур'є узагальненої функції  $f \in S'$  також позначимо  $\mathfrak{F}^{-1}f$ , і визначається воно аналогічно до прямого перетворення Фур'є згідно з формулою

$$\langle \mathfrak{F}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi \rangle \quad (\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle).$$

Зазначимо, що кожна функція  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , визначає лінійний неперервний функціонал на  $S$  згідно з формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \varphi \in S,$$

і, як наслідок, у цьому сенсі вона є елементом  $S'$ . Тому перетворення Фур'є функції  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , можна розглядати як перетворення Фур'є узагальненої функції  $\langle f, \varphi \rangle$ .

Носієм узагальненої функції  $f$  будемо називати замикання  $\overline{\mathfrak{N}}$  такої множини точок  $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$ , що для довільної  $\varphi \in S$ , яка дорівнює нулю в  $\overline{\mathfrak{N}}$ , виконується рівність  $\langle f, \varphi \rangle = 0$ . Носій узагальненої функції  $f$  будемо позначати через  $\text{supp } f$ . Також будемо говорити, що функція  $f$  зосереджена на множині  $G$ , якщо  $\text{supp } f \subseteq G$ .

У подальшому будемо користуватися такими позначеннями. Нехай функція  $f$  представлена інтегралом Фур'є

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

Тоді відрізком інтегралу Фур'є функції  $f$  назовемо вираз

$$S_{\boldsymbol{\sigma}}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \dots \int_{-\sigma_d}^{\sigma_d} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda},$$

де  $\tilde{f}(\boldsymbol{\lambda})$  — перетворення Фур'є функції  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ .

Нехай  $D_{\mathbf{a}^s} = D_{a_1^s, \dots, a_d^s}$  — паралелепіпед:  $|\lambda_j| < a_j^s$ ,  $j = \overline{1, d}$ ,  $s \geq 0$ , а  $\Gamma_{\mathbf{a}^s} = D_{\mathbf{a}^s} - D_{\mathbf{a}^{s-1}}$  при  $s \geq 1$  і  $\Gamma_{\mathbf{a}^0} = D_{\mathbf{a}^0}$ . Покладемо

$$f_{\mathbf{a}^s} = S_{\mathbf{a}^s}(f) - S_{\mathbf{a}^{s-1}}(f) = \int_{\Gamma_{\mathbf{a}^s}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda}, \quad s \geq 1,$$

i

$$f_{\mathbf{a}^0} = S_{\mathbf{a}^0}(f) = \int_{\Gamma_{\mathbf{a}^0}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

Представлення функції  $f$  рядом

$$f = f_{\mathbf{a}^0} + \sum_{s=1}^{\infty} f_{\mathbf{a}^s} = \sum_{s=0}^{\infty} f_{\mathbf{a}^s}$$

будемо називати розшаруванням  $f$  ( $\mathbf{a}$ -розшаруванням  $f$ ). У випадку, коли  $f \in L_p$ ,  $p > 2$ ,  $S_{\mathbf{a}^s}(f)$  розуміють, взагалі кажучи, як результат дії на  $f$  деякого оператора, який в образах Фур'є зводиться до множення на характеристичну функцію області  $D_{\mathbf{a}^s}$  (див. [5], (§3, гл.1)).

Для функції  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$  розглянемо величину

$$\mathcal{E}_{D_{\mathbf{a}^n}}(f)_p = \|f - S_{\mathbf{a}^{n-1}}(f)\|_p, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

яка називається наближенням функції  $f$   $\mathbf{a}^n$ -відрізками інтеграла Фур'є.

У випадку  $1 < p < \infty$  величини (2) і (6) мають один і той же порядок [4], тобто для функції  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{E}_{D_{\mathbf{a}^n}}(f)_p \asymp E_{\mathbf{a}^n}(f)_p. \quad (7)$$

Далі для вектора  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ ,  $r_j > 0$ ,  $j = \overline{1, d}$ , введемо величину

$$g(\mathbf{r}) = \left( \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \frac{1}{r_j} \right)^{-1}. \quad (8)$$

Зауважимо, що при  $r_1 = r_2 = \dots = r_d = r$  маємо  $g(\mathbf{r}) = r$ .

Тоді для норми анізотропних просторів  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ , згідно з теоремою А, можна записати співвідношення [4]:

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)} \asymp \left( \sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|f_{\mathbf{a}^s}\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \quad \text{при } 1 \leq \theta < \infty, \quad (9)$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^r(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s \geq 0} b^s \|f_{\mathbf{a}^s}\|_p < \infty, \quad (10)$$

де  $b = 2^{g(\mathbf{r})}$ , тобто  $a_j = 2^{g(\mathbf{r})/r_j}$ ,  $j = \overline{1, d}$ .

**2. Наближення класів  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$  у метриці простору  $L_q(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 < p \leq q < \infty$ .**

Попередньо сформулюємо твердження, яке буде істотно використовуватися при встановленні результатів.

**Теорема Б** [3, с. 150]. *Якщо  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ , то для цілої функції експоненціального типу  $g = g_{\nu} \in L_p(\mathbb{R}^d)$  має місце “нерівність різних метрик”*

$$\|g_{\nu}\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^d)} \leq 2^d \left( \prod_{j=1}^d \nu_k \right)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|g_{\nu}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^d)}. \quad (11)$$

Наведемо одержані результати.

**Теорема 1.** Нехай  $1 < p \leq q < \infty$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ . Тоді для  $g(\mathbf{r}) > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ , мають місце порядкові співвідношення

$$\mathcal{E}_{D_{a^n}}(B_{p,\theta}^{\mathbf{r}})_q \asymp E_{a^n}(B_{p,\theta}^{\mathbf{r}})_q \asymp 2^{-n(g(\mathbf{r}) - d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))}, \quad (12)$$

де  $a_j = 2^{g(\mathbf{r})/r_j}$ ,  $j = \overline{1, d}$ .

**Доведення.** Спочатку отримаємо в (12) оцінки зверху. Оскільки  $B_{p,\theta}^{\mathbf{r}} \subset B_{p,\infty}^{\mathbf{r}} = H_p^{\mathbf{r}}$ ,  $1 \leq \theta < \infty$ , то шукану оцінку достатньо отримати для величини  $\mathcal{E}_{D_{a^n}}(H_p^{\mathbf{r}})_q$ . У залежності від співвідношення між параметрами  $p$  і  $q$  розглянемо два випадки.

1) Нехай  $1 < p = q < \infty$ . Оскільки для  $f \in H_p^{\mathbf{r}}$  згідно з (10)  $\|f_{a^s}\|_p \ll 2^{-sg(\mathbf{r})}$ , то скориставшись нерівністю Мінковського, будемо мати

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{D_{a^n}}(f)_p &= \|f - S_{a^{n-1}}(f)\|_p = \left\| \sum_{s=0}^{\infty} f_{a^s} - S_{a^{n-1}}(f) \right\|_p = \\ &= \left\| \sum_{s=n}^{\infty} f_{a^s} \right\|_p \leq \sum_{s=n}^{\infty} \|f_{a^s}\|_p \leq \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-sg(\mathbf{r})} \ll 2^{-ng(\mathbf{r})}. \end{aligned}$$

2) Нехай тепер  $1 < p < q < \infty$ . Тоді для  $f \in H_p^{\mathbf{r}}$ , врахувавши (10) та скориставшись нерівностями Мінковського і різних метрик Нікольського (11), можемо записати

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{D_{a^n}}(f)_q &= \|f - S_{a^{n-1}}(f)\|_q = \left\| \sum_{s=n}^{\infty} f_{a^s} \right\|_q \leq \sum_{s=n}^{\infty} \|f_{a^s}\|_q \ll \\ &\ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f_{a^s}\|_p \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} 2^{-sg(\mathbf{r})} = \\ &= \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-s(g(\mathbf{r}) - d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))} \ll 2^{-n(g(\mathbf{r}) - d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))}. \end{aligned}$$

Оцінку зверху для величини  $\mathcal{E}_{D_{a^n}}(H_p^{\mathbf{r}})_q$  і, таким чином, згідно з (7) для найкращого наближення  $E_{D_{a^n}}(H_p^{\mathbf{r}})_q$  встановлено.

Отримаємо тепер в (12) оцінки знизу. Оскільки має місце вкладення  $B_{p,1}^{\mathbf{r}} \subset B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}$ ,  $1 < \theta \leq \infty$ , то шукану оцінку достатньо отримати для величини  $\mathcal{E}_{D_{a^n}}(B_{p,1}^{\mathbf{r}})_q$ . Іншими словами достатньо оцінити знизу величину  $\|f - S_{a^{n-1}}(f)\|_q$  для деякої функції  $f \in B_{p,1}^{\mathbf{r}}$ .

З цією метою розглянемо функцію  $F_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  на основі якої побудуємо функцію для якої досягається оцінка (12).

Нехай  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ ,  $\mathbf{k} = (k, \dots, k)$ ,

$$F_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j}$$

та

$$F_0(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x_j}{x_j}.$$

Тоді для перетворення Фур'є функції  $F_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  має місце співвідношення

$$\mathfrak{F}F_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \chi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{j=1}^d \chi_k(\lambda_j),$$

де

$$\chi_k(\lambda_j) = \begin{cases} 1, & a_j^{k-1} < |\lambda_j| < a_j^k, \\ \frac{1}{2}, & |\lambda_j| = a_j^{k-1} \text{ або } |\lambda_j| = a_j^k, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases} \quad \chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |\lambda_j| < 1; \\ \frac{1}{2}, & |\lambda_j| = 1; \\ 0, & |\lambda_j| > 1. \end{cases}$$

Відповідно для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\lambda}) = F_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).$$

Відзначимо, що таким чином  $F_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  — ціла функція з  $L_p(\mathbb{R}^d)$ , носій перетворення Фур'є якої зосереджене в  $\Gamma_{\mathbf{a}^{\mathbf{k}}}$ .

Перш ніж безпосередньо перейти до встановлення оцінки знизу в (12), одержимо порядок величини

$$\|F_{\mathbf{k}}\|_p = \left\| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_p. \quad (13)$$

Для оцінки зверху будемо мати

$$\begin{aligned} \|F_{\mathbf{k}}\|_p &= \left\| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_p \leq \\ &\leq \left\| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right\|_p + \left\| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_p = \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^d dx_j \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^d dx_j \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \left( a_j^{k(p-1)} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \left( a_j^{(k-1)(p-1)} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} \ll \end{aligned}$$

$$\ll \prod_{j=1}^d a_j^{\frac{k(p-1)}{p}} + \prod_{j=1}^d a_j^{\frac{(k-1)(p-1)}{p}} \ll \prod_{j=1}^d a_j^{k(1-\frac{1}{p})} = \prod_{j=1}^d a_j^{k/p'}. \quad (14)$$

Врахувавши, що  $a_j = 2^{g(\mathbf{r})/r_j}$  та співвідношення (8), оцінку (14) продовжимо таким чином

$$\|F_{\mathbf{k}}\|_p \ll \prod_{j=1}^d a_j^{k/p'} = \prod_{j=1}^d 2^{kg(\mathbf{r})/r_j p'} = 2^{\frac{kg(\mathbf{r})}{p'} \sum_{j=1}^d \frac{1}{r_j}} = 2^{\frac{kg(\mathbf{r})}{p'} \frac{d}{g(\mathbf{r})}} = 2^{\frac{dk}{p'}}. \quad (15)$$

При оцінці норми  $\|F_{\mathbf{k}}\|_p$  знизу, отримаємо

$$\begin{aligned} \|F_{\mathbf{k}}\|_p &= \left\| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_p \geq \\ &\geq \left| \left\| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right\|_p - \left\| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_p \right| = \\ &= \left| \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^d dx_j \right)^{\frac{1}{p}} - \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^d dx_j \right)^{\frac{1}{p}} \right| = \\ &= \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \left| \prod_{j=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} - \prod_{j=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} \right| \gg \\ &\gg \left| \prod_{j=1}^d a_j^{\frac{k(p-1)}{p}} - \prod_{j=1}^d a_j^{\frac{(k-1)(p-1)}{p}} \right| \gg (2^{\frac{dk}{p'}} - 2^{\frac{d(k-1)}{p'}}) \gg 2^{\frac{dk}{p'}} \end{aligned} \quad (16)$$

Співставивши (15) і (16), для  $\|F_{\mathbf{k}}\|_p$  можемо записати порядкове співвідношення

$$\|F_{\mathbf{k}}\|_p \asymp 2^{\frac{dk}{p'}}. \quad (17)$$

Далі розглянемо функцію

$$g_1(\mathbf{x}) = C_1 2^{-n(g(\mathbf{r}) + \frac{d}{p'})} F_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}),$$

де  $\mathbf{n} = (n, \dots, n) \in \mathbb{N}^d$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ ,  $C_1 > 0$ .

Покажемо, що з деякою константою  $C_1 > 0$  функція  $g_1$  належить класу  $B_{p,1}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d)$ . Згідно з (9) та (17) маємо

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{B_{p,1}^{\mathbf{r}}} &\asymp \sum_s 2^{sg(\mathbf{r})} \|f_{\mathbf{a}^s}(g_1)\|_p \asymp \\ &\asymp \sum_s 2^{sg(\mathbf{r})} 2^{-n(g(\mathbf{r}) + \frac{d}{p'})} \|F_{\mathbf{n}}\|_p = 2^{-n(g(\mathbf{r}) + \frac{d}{p'})} \sum_s 2^{sg(\mathbf{r})} 2^{\frac{dn}{p'}} \ll \end{aligned}$$



$$\ll 2^{-n\left(g(r)+\frac{d}{p'}\right)} 2^{ng(r)} 2^{\frac{dn}{p'}} = 1.$$

Оскільки, за вибором функції  $g_1$  для неї має місце співвідношення  $S_{a^{n-1}}(g_1) = 0$ , то

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{D_{a^n}}(B_{p,1}^r)_q &\geq \mathcal{E}_{D_{a^n}}(g_1)_q = \|g_1 - S_{a^{n-1}}(g_1)\|_q = \|g_1\|_q \gg \\ &\gg 2^{-n\left(g(r)+\frac{d}{p'}\right)} \|F_n\|_q \gg 2^{-n\left(g(r)+\frac{d}{p'}\right)} 2^{\frac{dn}{q}} = 2^{-n\left(g(r)-d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}. \end{aligned}$$

Оцінку знизу в (12) встановлено. Теорему доведено.

**Зауваження 1.** У випадку  $r_1 = \dots = r_d = r$ , тобто для ізотропних класів Нікольського–Бесова  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ , оцінку (12) встановлено в [8]. Зазначимо також, що апроксимативні характеристики ізотропних класів  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$  досліджувалися у роботі [9].

**Зауваження 2.** Анізотропні класи Нікольського–Бесова функцій багатьох змінних, що визначені на  $\mathbb{R}^d$  з точки зору знаходження точних за порядком значень деяких апроксимативних характеристик досліджувалися, зокрема, у роботах [10], [11], а ізотропні та анізотропні класи Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних — у роботах [12]–[15].

**Зауваження 3.** В одномірному випадку ( $d = 1$ ) анізотропні класи Нікольського–Бесова збігаються з класами Нікольського–Бесова мішаної гладкості, які досліджувалися в роботах [16], [17]. Розв’язку ряду екстремальних проблем апроксимації функцій визначених на прямій присвячені роботи С.Б. Вакарчука [18], [19], де також проведено детальний порівняльний аналіз завершених результатів, які пов’язані з розв’язком екстремальних задач теорії наближення в періодичному випадку і випадку всієї дійсної осі.

## Література

- [1] *S. M. Nikol'skii*, Inequalities for entire functions of finite power and their application to the theory of differentiable functions of many variables, Tr. Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, **38**, 244–278 (1951). (in Russian).
- [2] *O. V. Besov*, Investigation of one family of functional spaces in connection with the embedding and continuation theorems, Tr. Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, **60**, 42–81 (1961). (in Russian).
- [3] *S. M. Nikol'skii*, Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Nauka, Moscow, 1969, 480 pp. (in Russian).
- [4] *P. I. Lizorkin*, Generalized Hölder spaces  $B_{p,\theta}^{(r)}$  and their relationship with the Sobolev spaces  $L_p^{(r)}$ , Sib. Mat. Zh., **9**, No. 5, 1127–1152 (1968). (in Russian).
- [5] *P. I. Lizorkin*, Generalized Liouville differentiation and the method of multipliers in the theory of embeddings of classes of differentiable functions, Tr. Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, **105**, 89–167 (1969). (in Russian).

- [6] *V. S. Vladimirov*, Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow (1967), 436 pp. (in Russian).
- [7] *S. M. Nikol'skii*, Embedding theorems for the classes of generalized functions, Sib. Mat. Zh., **9**, No. 5, 1107–1126 (1968). (in Russian).
- [8] *S. Ya. Yanchenko*, Approximation of functions from the Besov classes by entire functions in the space  $L_q(\mathbb{R}^d)$ , in: Collection of Works “Approximation Theory of Functions and Related Problems” (in Ukrainian), Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, **7**, No. 1, 380–391 (2010).
- [9] *S. Ya. Yanchenko*, Approximation of functions from the isotropic Nikol'skii–Besov class in the uniform and integral metrics, Ukr. Mat. Zh., **67**, No. 10, 1423–1433 (2015) (in Ukrainian); **English translation:** Ukr. Math. J., **67**, No. 10, 1599–1610 (2016).
- [10] *Jiang Yanjie, Liu Yongping*, Average Widths and Optimal Recovery of Multivariate Besov Classes in  $L_p(\mathbb{R}^d)$ , J. of Approx. Theory, **102**, 155–170 (2000).
- [11] *Jiang Yanjie*, Optimal recovery of anisotropic Besov–Wiener classes, Anal. Math., **28**, 77–88 (2002).
- [12] *A. S. Romanyuk*, Approximative characteristics of the isotropic classes of periodic functions of many variables, Ukr. Mat. Zh., **61**, No. 4, 513–523 (2009) (in Russian); **English translation:** Ukr. Math. J., **61**, No. 4, 613–626 (2009).
- [13] *A. S. Romanyuk and V. S. Romanyuk*, Trigonometric and orthoprojection widths of classes of periodic functions of many variables, Ukr. Mat. Zh., **61**, No. 10, 1348–1366 (2009) (in Russian); **English translation:** Ukr. Math. J., **61**, No. 10, 1589–1609 (2009).
- [14] *Gensun Fang, Fred J. Hickernell, Huan Li*, Approximation on anisotropic Besov classes with mixed norms by standard information, J. of Complexity, **21**, 294–313 (2005).
- [15] *V. V. Myronyuk*, Trigonometric approximations and Kolmogorov widths of anisotropic Besov classes of periodic functions of several variables, Ukr. Mat. Zh., **66**, No. 8, 1117–1132 (2014) (in Ukrainian); **English translation:** Ukr. Math. J., **66**, No. 8, 1248–1266 (2015).
- [16] *Wang Heping, Sun Yongsheng*. Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions, Northeast. Math. J., **11**, No. 4, 454–466 (1995).
- [17] *S. Ya. Yanchenko*, Approximation of the classes  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  of functions of many variables by entire functions of a special form, Ukr. Mat. Zh., **62**, No. 8, 1124–1138 (2010) (in Ukrainian); **English translation:** Ukr. Math. J., **62**, No. 8, 1307–1325 (2011).

- [18] *S. B. Vakarchuk*, Some extremal problems of the approximation theory of functions on the real axis. I, Ukr. Mat. Visn., **9**, No. 3, 401–429 (2012). (in Russian).
- [19] *S. B. Vakarchuk*, Some extremal problems of the approximation theory of functions on the real axis. II, Ukr. Mat. Visn., **9**, No. 4, 578–602 (2012). (in Russian).

**Contact information:** Department of the Theory of Functions, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, 3, Tereshchenkivska st., 01004, Kyiv, Ukraine.

E-mail: [Yan.Sergiy@gmail.com](mailto:Yan.Sergiy@gmail.com)